

Trigonometrie

Nicht rechtwinklige Dreiecke

Methodenliste

Datei Nr. 16050

Friedrich W. Buckel

Stand 4. März 2023

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Methoden für nicht rechtwinklige Dreiecke

Gegeben		Beispiel	1. Schritt	2. Schritt	3. Schritt
1 Seite, 2 Winkel SWW		$\alpha = 40^\circ$ $\beta = 80^\circ$ $c = 5 \text{ cm}$	3. Winkel berechnen $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$	Gegenseite zu α mit Sinussatz $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma}$	Gegenseite zu β mit Sinussatz $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$
2 Seiten und 1 Winkel	SSW_g	$a = 5 \text{ cm}$ $b = 4 \text{ cm}$ $\alpha = 65^\circ$	Gegenwinkel zu b mit Sinussatz $\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$	3. Winkel berechnen $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$	3. Seite mit Sinussatz $\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$
	SSW_k	$a = 4 \text{ cm}$ $b = 5 \text{ cm}$ $\alpha = 25^\circ$	Gegenwinkel zu b mit Sinussatz $\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$ Ist $\sin \beta < 1$, gibt es 2 Lösungen. $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$ Ist $\sin \beta > 1$, gibt es keine Lösung.	3. Winkel berechnen $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ Wenn es zu β zwei Lösungen gibt, dann auch für γ !	3. Seite mit Sinussatz $\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$ Ggf. auch mit einer 2. Lösung !
	SWS	$a = 4 \text{ cm}$ $b = 5 \text{ cm}$ $\gamma = 75^\circ$	Gegenseite des Winkels mit dem Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$ $\Rightarrow c = \sqrt{\dots}$	2. Winkel mit dem Sinussatz $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \gamma}{c}$	3. Winkel berechnen $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$
3 Seiten: SSS		$a = 5 \text{ cm}$ $b = 4 \text{ cm}$ $c = 6 \text{ cm}$	Einen Winkel mit dem Kosinussatz z.B. $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$ $\Rightarrow \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \alpha = \dots$	2. Winkel mit dem Sinussatz $\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$ Nicht den größeren Winkel berechnen, sondern den Gegenwinkel der größeren Seite	3. Winkel berechnen $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$
3 Winkel: WWW			Drei Winkel ergeben noch kein eindeutiges Dreieck, es muss noch eine Seite gegeben sein.		

Lösungen zu den Beispielen:

(1) Gegeben: $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 80^\circ$, $c = 5 \text{ cm}$ (Fall: SWW)

1. Schritt: Dritten Winkel berechnen:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 60^\circ$$

2. Schritt: Gegenseite zu α mit dem Sinussatz berechnen:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma} \approx 3,7 \text{ cm}$$

3. Schritt: Gegenseite zu β mit dem Sinussatz berechnen:

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} \approx 5,7 \text{ cm}$$

Ergebnisberechnung mit TI Nspire:

The screenshot shows a TI Nspire calculator interface with the following content:

Input	Output
180-40-80	60
$\frac{5 \cdot \sin(40)}{\sin(60)}$	3.711136
$\frac{5 \cdot \sin(80)}{\sin(60)}$	5.6857902

The calculator also shows a cursor on the input line and a page indicator '3/99' at the bottom right.

(2) Gegeben: $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $\alpha = 65^\circ$ (Fall: SSWg)

1. Schritt: Gegenwinkel β zu b mit dem Sinussatz berechnen:

$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = 0,7250 \Rightarrow \beta \approx 46,5^\circ$$

2. Schritt: Dritten Winkel berechnen:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 180^\circ - 65^\circ - 46,5^\circ = 68,5^\circ$$

3. Schritt: Dritte Seite mit dem Sinussatz berechnen:

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} \approx 5,1 \text{ cm}$$

Ergebnisberechnung mit TI Nspire:

1.1	1.2	GRD AUTO REELL
$4 \cdot \sin(65)$.72504623
5		
$\sin^{-1}(\text{Ans})$.

1.1	1.2	GRD AUTO REELL
$4 \cdot \sin(65)$.72504623
5		
$\sin^{-1}(.72504622962932)$		46.472694
$\sin^{-1}\left(\frac{4 \cdot \sin(65)}{5}\right)$		46.472694

Mit **Ans** wird das letzte Ergebnis eingefügt

1.1	1.2	GRD AUTO REELL
$4 \cdot \sin(65)$.72504623
5		
$\sin^{-1}(.72504622962932)$		46.472694
$\sin^{-1}\left(\frac{4 \cdot \sin(65)}{5}\right)$		46.472694
$180 - 65 - \text{Ans}$.

1.1	1.2	GRD AUTO REELL
$4 \cdot \sin(65)$		$\sin \beta = .72504623$
5		$\beta = 46.472694$
$\sin^{-1}(.72504622962932)$		$\beta = 46.472694$
$\sin^{-1}\left(\frac{4 \cdot \sin(65)}{5}\right)$		
$180 - 65 - 46.472693728224$		68.527306

1. Möglichkeit:
Zuerst $\sin \beta$
berechnen!

2. Möglichkeit !!!
ohne zuerst $\sin \beta$
zu berechnen.

In der 1. Zeile wird γ berechnet, in der

2. Zeile c mit dem genauen γ -Wert

über $5 \cdot \frac{\sin(\text{Ans})}{\sin(65)}$. In der 3. Zeile dieselbe

Berechnung mit $\gamma \approx 68,5^\circ$.

$180 - 65 - 46.472693728224$		$\gamma = 68.527306$
$5 \cdot \frac{\sin(68.527306271776)}{\sin(65)}$		$c = 5.133974$
$5 \cdot \frac{\sin(68.5)}{\sin(65)}$		$c = 5.133011$

Durch die Rundung verschwindet die Abweichung wieder.

(3) Gegeben: $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $\alpha = 25^\circ$ (Fall: SSWk).

1. Schritt: Gegenwinkel β zu b mit dem Sinussatz berechnen (Es gibt 2 Lösungen!):

$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} \Rightarrow \beta_1 \approx 31,9^\circ$$

$$\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 \approx 148,1^\circ \quad \text{!!! (Nicht vergessen!)}$$

2. Schritt: Dritten Winkel berechnen:

$$\gamma_1 = 180^\circ - \alpha - \beta_1 \approx 180^\circ - 25^\circ - 31,9^\circ = 123,1^\circ$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - \alpha - \beta_2 \approx 180^\circ - 25^\circ - 148,1^\circ = 6,9^\circ$$

3. Schritt: Dritte Seite mit dem Sinussatz berechnen:

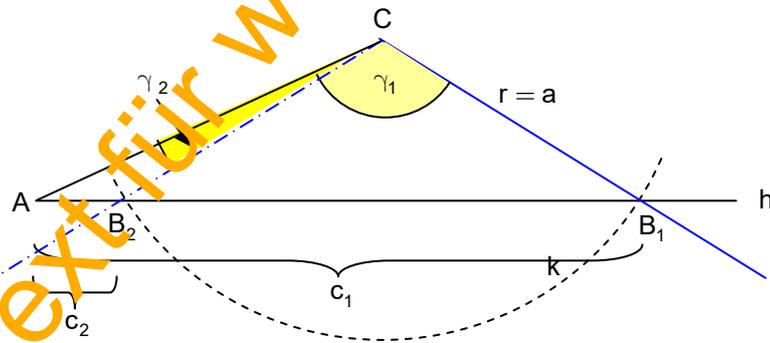
$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha} \Rightarrow c_1 = \frac{a \cdot \sin \gamma_1}{\sin \alpha} \approx 7,9 \text{ cm}$$

$$\text{und} \quad c_2 = \frac{a \cdot \sin \gamma_2}{\sin \alpha} \approx 1,1 \text{ cm}$$

Konstruktion dazu:

Man zeichnet von A aus die Halbgerade h , legt α an, trägt von A aus bis C b ab. Der Kreis um C mit Radius a schneidet h zweimal in B_1 und B_2 .

Es gibt somit zwei nicht kongruente Lösungen: AB_1C und AB_2C .



Berechnung mit TI Nspire:

1.1	1.2	GRD	AUTO	REELL
$\sin^{-1}\left(\frac{5 \cdot \sin(25)}{4}\right)$		$\beta_1 =$	31.888831	
180-Ans				
$180 - 31.888830830518$		$\beta_2 =$	148.11117	
$180 - 25 - 31.9$		$\gamma_1 =$	123.1	
$180 - 25 - 148.1$		$\gamma_2 =$	6.9	
$\frac{4 \cdot \sin(123.1)}{\sin(25)}$		$c_1 =$	7.9288454	
$\frac{4 \cdot \sin(6.9)}{\sin(25)}$		$c_2 =$	1.1370719	

(4) Gegeben: $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $\gamma = 75^\circ$ (Fall: SWS).

1. Schritt: Gegenseite des Winkels mit dem Kosinussatz berechnen

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos \gamma$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos \gamma} \approx 5,5 \text{ cm}$$

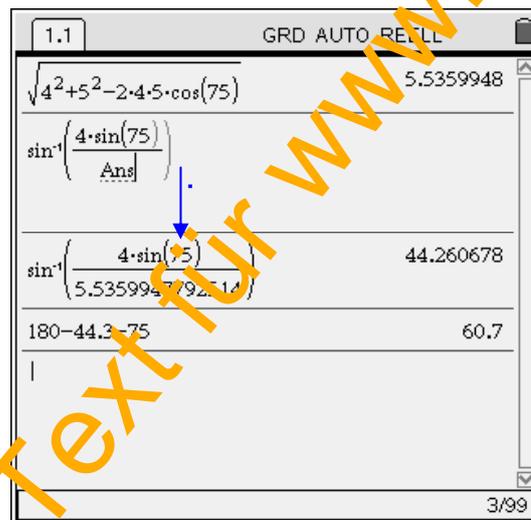
2. Schritt: Zweiten Winkel mit dem Sinussatz berechnen:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \gamma}{c} \Rightarrow \alpha \approx 44,3^\circ$$

3. Schritt: Dritten Winkel über die Winkelsumme berechnen:

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma \approx 180^\circ - 44,3^\circ - 75^\circ = 60,7^\circ$$

Berechnung mit TI-Nspire:



(5) Gegeben: $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$ (Fall: SSS).

1. Schritt: Einen Winkel mit dem Kosinussatz berechnen:

$$\text{z. B.: } a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \alpha \approx 55,8^\circ$$

2. Schritt: Zweiten Winkel mit dem Sinussatz berechnen:

$$\text{z. B.: } \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} \Rightarrow \beta = 41,4^\circ$$

3. Schritt: Dritten Winkel über die Winkelsumme berechnen:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 180^\circ - 55,8^\circ - 41,4^\circ = 82,8^\circ$$

Berechnung mit TI Nspire:

